

机器学习数学基础知识

高等数学

1. 导数定义：

导数和微分的概念

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

或者：

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

2. 左右导数导数的几何意义和物理意义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数分别定义为：

左导数：

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, (x = x_0 + \Delta x)$$

$$\text{右导数：} f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3. 函数的可导性与连续性之间的关系

Th1: 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导

Th2: 若函数在点 x_0 处可导，则 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续，反之则不成立。即函数连续不一定可导。

Th3: $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

4. 平面曲线的切线和法线

切线方程： $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ 法线方程：

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0$$

5. 四则运算法则

设函数 $u = u(x)$ ， $v = v(x)$ 在点 x 可导则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v' \quad d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$(2) (uv)' = uv' + vu' \quad d(uv) = u dv + v du$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} (v \neq 0) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

6. 基本导数与微分表

$$(1) y = c (\text{常数}) \quad y' = 0 \quad dy = 0$$

$$(2) y = x^\alpha (\alpha \text{为实数}) \quad y' = \alpha x^{\alpha-1} \quad dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$$

$$(3) y = a^x \quad y' = a^x \ln a \quad dy = a^x \ln a dx \quad \text{特例: } (e^x)' = e^x \quad d(e^x) = e^x dx$$

$$(4) y = \log_a x \quad y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$dy = \frac{1}{x \ln a} dx \quad \text{特例: } y = \ln x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$(5) y = \sin x$$

$$y' = \cos x \quad d(\sin x) = \cos x dx$$

$$(6) y = \cos x$$

$$y' = -\sin x \quad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$(7) y = \tan x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad d(\tan x) = \sec^2 x dx \quad (8) y = \cot x$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \quad d(\cot x) = -\csc^2 x dx \quad (9) y = \sec x \quad y' = \sec x \tan x$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \quad (10) y = \csc x \quad y' = -\csc x \cot x$$

$$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx \quad (11) y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(12) y = \arccos x$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(13) y = \arctan x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \quad d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(14) y = \text{arc cot } x$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$d(\text{arc cot } x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(15) y = shx$$

$$y' = chx \quad d(shx) = chx dx$$

$$(16) y = chx$$

$$y' = shx \quad d(chx) = shx dx$$

7. 复合函数，反函数，隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法

(1) 反函数的运算法则：设 $y = f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续，在点 x 处可导且 $f'(x) \neq 0$ ，则其反函数在点 x 所对应的 y 处可导，并且有 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

(2) 复合函数的运算法则：若 $\mu = \varphi(x)$ 在点 x 可导，而 $y = f(\mu)$ 在对应点 μ ($\mu = \varphi(x)$) 可导，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 可导，且 $y' = f'(\mu) \cdot \varphi'(x)$

(3) 隐函数导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法：

1) 方程两边对 x 求导，要记住 y 是 x 的函数，则 y 的函数是 x 的复合函数。例如 $\frac{1}{y}$ ， y^2 ， $\ln y$ ， e^y 等都是 x 的复合函数。

对 x 求导应按复合函数连锁法则做。

2) 公式法。由 $F(x, y) = 0$ 知 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ ，其中， $F'_x(x, y)$ ， $F'_y(x, y)$ 分别表示 $F(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数

3) 利用微分形式不变性

8. 常用高阶导数公式

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(3) (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(4) (x^m)^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n}$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(6) 莱布尼兹公式：若 $u(x)$ ， $v(x)$ 均 n 阶可导，则 $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$ ，其中 $u^{(0)} = u$ ， $v^{(0)} = v$

9. 微分中值定理，泰勒公式

Th1: (费马定理)

若函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ 或 $f(x) \geq f(x_0)$ ，

(2) $f(x)$ 在 x_0 处可导，则有 $f'(x_0) = 0$

Th2: (罗尔定理)

设函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)在闭区间 $[a, b]$ 上连续；

(2)在 (a, b) 内可导；

(3) $f(a) = f(b)$ ；

则在 (a, b) 内一存在个 ξ ，使 $f'(\xi) = 0$

Th3: (拉格朗日中值定理)

设函数 $f(x)$ 满足条件：(1)在 $[a, b]$ 上连续；

(2)在 (a, b) 内可导；

则在 (a, b) 内一存在个 ξ ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Th4: (柯西中值定理)

设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 满足条件：

(1) 在 $[a, b]$ 上连续；

(2) 在 (a, b) 内可导且 $f'(x)$ ， $g'(x)$ 均存在，且 $g'(x) \neq 0$

则在 (a, b) 内存在一个 ξ ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

10. 洛必达法则

法则 I ($\frac{0}{0}$ 型)

设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 满足条件：

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;

$f(x)$ ， $g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导，(在 x_0 处可除外)且 $g'(x) \neq 0$ ；

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则： $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。 法则I' ($\frac{0}{0}$ 型)设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 满足条件：

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ ；

存在一个 $X > 0$ ，当 $|x| > X$ 时， $f(x)$ ， $g(x)$ 可导，且 $g'(x) \neq 0$ ； $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则： $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 法则II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设函数 $f(x)$ ， $g(x)$

满足条件： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ； $f(x)$ ， $g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导(在 x_0 处可除外)且 $g'(x) \neq 0$ ； $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。则

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。同理法则II' ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)仿法则I'可写出。

11. 泰勒公式

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n + 1$ 阶导数, 则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x , 在 x_0 与 x 之间至少存在一个 ξ , 使得:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad \text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ 称为 } f(x) \text{ 在点 } x_0 \text{ 处的 } n \text{ 阶泰勒余项。}$$

令 $x_0 = 0$, 则 n 阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \dots (1) \quad \text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间. (1) 式称为麦克劳林公式}$$

常用五种函数在 $x_0 = 0$ 处的泰勒公式

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$$

$$\text{或 } = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$(2) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!}\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$$

$$\text{或 } = x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!}\sin \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!}\cos \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$$

$$\text{或 } = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!}\cos \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$\text{或 } = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(5) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$$

$$\text{或 } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

12. 函数单调性的判断

Th1: 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 区间内可导, 如果对 $\forall x \in (a, b)$, 都有 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$), 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的 (或单调减少)

Th2: (取极值的必要条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取极值, 则 $f'(x_0) = 0$

。

Th3: (取极值的第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可微, 且 $f'(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 但 $f'(x_0)$ 不存在。)

(1)若当 x 经过 x_0 时, $f'(x)$ 由“+”变“-”, 则 $f(x_0)$ 为极大值;

(2)若当 x 经过 x_0 时, $f'(x)$ 由“-”变“+”, 则 $f(x_0)$ 为极小值;

(3)若 $f'(x)$ 经过 $x = x_0$ 的两侧不变号, 则 $f(x_0)$ 不是极值。

Th4: (取极值的第二充分条件) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x) \neq 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则当 $f''(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值;

当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值。

注: 如果 $f''(x_0) < 0$, 此方法失效。

13. 渐近线的求法 (1)水平渐近线 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, 则

$y = b$ 称为函数 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

(2)铅直渐近线 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 则

$x = x_0$ 称为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线。

(3)斜渐近线 若 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$, 则 $y = ax + b$ 称为 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

14. 函数凹凸性的判断

Th1: (凹凸性的判别定理) 若在 I 上 $f''(x) < 0$ (或 $f''(x) > 0$), 则 $f(x)$ 在 I 上是凸的 (或凹的)。

Th2: (拐点的判别定理1) 若在 x_0 处 $f''(x) = 0$, (或 $f''(x)$ 不存在), 当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

Th3: (拐点的判别定理2) 设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有三阶导数, 且 $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

15. 弧微分

$$dS = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

16. 曲率

曲线 $y = f(x)$ 在点 (x, y) 处的曲率 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。 对于参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

17. 曲率半径

曲线在点 M 处的曲率 $k(k \neq 0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系： $\rho = \frac{1}{k}$ 。

高等数学

1. 导数定义：

导数和微分的概念

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

或者：

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

2. 左右导数导数的几何意义和物理意义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数分别定义为：

左导数：

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, (x = x_0 + \Delta x)$$

$$\text{右导数：} f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3. 函数的可导性与连续性之间的关系

Th1: 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导

Th2: 若函数在点 x_0 处可导, 则 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 反之则不成立。即函数连续不一定可导。

Th3: $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

4. 平面曲线的切线和法线

切线方程： $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ 法线方程：

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0$$

5. 四则运算法则

设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 在点 x 可导则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v' \quad d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$(2) (uv)' = uv' + vu' \quad d(uv) = u dv + v du$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} (v \neq 0) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

6. 基本导数与微分表

$$(1) y = c (\text{常数}) \quad y' = 0 \quad dy = 0$$

$$(2) y = x^\alpha (\alpha \text{为实数}) \quad y' = \alpha x^{\alpha-1} \quad dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$$

$$(3) y = a^x \quad y' = a^x \ln a \quad dy = a^x \ln a dx \quad \text{特例: } (e^x)' = e^x \quad d(e^x) = e^x dx$$

$$(4) y = \log_a x \quad y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$dy = \frac{1}{x \ln a} dx \quad \text{特例: } y = \ln x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$(5) y = \sin x$$

$$y' = \cos x \quad d(\sin x) = \cos x dx$$

$$(6) y = \cos x$$

$$y' = -\sin x \quad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$(7) y = \tan x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad d(\tan x) = \sec^2 x dx \quad (8) y = \cot x$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \quad d(\cot x) = -\csc^2 x dx \quad (9) y = \sec x \quad y' = \sec x \tan x$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \quad (10) y = \csc x \quad y' = -\csc x \cot x$$

$$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx \quad (11) y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(12) y = \arccos x$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(13) y = \arctan x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \quad d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(14) y = \text{arc cot } x$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$d(\text{arc cot } x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(15) y = \text{sh } x$$

$$y' = \text{ch } x \quad d(\text{sh } x) = \text{ch } x dx$$

$$(16) y = \text{ch } x$$

$$y' = \text{sh } x \quad d(\text{ch } x) = \text{sh } x dx$$

7. 复合函数, 反函数, 隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法

(1) 反函数的运算法则: 设 $y = f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续, 在点 x 处可导且 $f'(x) \neq 0$, 则其反函数在点 x 所对应的 y 处可导, 并且有 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

(2) 复合函数的运算法则: 若 $\mu = \varphi(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(\mu)$ 在对应点 $\mu (\mu = \varphi(x))$ 可导, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 可导, 且 $y' = f'(\mu) \cdot \varphi'(x)$

(3) 隐函数导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法:

1) 方程两边对 x 求导, 要记住 y 是 x 的函数, 则 y 的函数是 x 的复合函数. 例如 $\frac{1}{y}, y^2, \ln y, e^y$ 等均是 x 的复合函数.

对 x 求导应按复合函数连锁法则做.

2) 公式法. 由 $F(x, y) = 0$ 知 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$, 其中, $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ 分别表示 $F(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数

3) 利用微分形式不变性

8. 常用高阶导数公式

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(3) (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(4) (x^m)^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n}$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(6) 莱布尼兹公式: 若 $u(x), v(x)$ 均 n 阶可导, 则 $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$, 其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$

9. 微分中值定理, 泰勒公式

Th1: (费马定理)

若函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 并且在此邻域内恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ 或 $f(x) \geq f(x_0)$,

(2) $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则有 $f'(x_0) = 0$

Th2: (罗尔定理)

设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2)在 (a, b) 内可导 ;

(3) $f(a) = f(b)$;

则在 (a, b) 内一存在个 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$

Th3: (拉格朗日中值定理)

设函数 $f(x)$ 满足条件 : (1)在 $[a, b]$ 上连续 ;

(2)在 (a, b) 内可导 ;

则在 (a, b) 内一存在个 ξ , 使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Th4: (柯西中值定理)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足条件 :

(1) 在 $[a, b]$ 上连续 ;

(2) 在 (a, b) 内可导且 $f'(x)$, $g'(x)$ 均存在 , 且 $g'(x) \neq 0$

则在 (a, b) 内存在一个 ξ , 使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

10. 洛必达法则

法则 I ($\frac{0}{0}$ 型)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足条件 :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;

$f(x)$, $g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导 , (在 x_0 处可除外)且 $g'(x) \neq 0$;

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。 法则I' ($\frac{0}{0}$ 型)设函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足条件 :

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$;

存在一个 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $f(x)$, $g(x)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 法则II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设函数 $f(x)$, $g(x)$

满足条件 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$; $f(x)$, $g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导(在 x_0 处可除外)且 $g'(x) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。同理法则III' ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)仿法则I'可写出。

11. 泰勒公式

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n + 1$ 阶导数, 则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x , 在 x_0 与 x 之间至少存在一个 ξ , 使得:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \text{ 其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ 称为 } f(x) \text{ 在点 } x_0 \text{ 处的 } n \text{ 阶泰勒余项。}$$

令 $x_0 = 0$, 则 n 阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \dots (1) \text{ 其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间. (1) 式称为麦克劳林公式}$$

常用五种函数在 $x_0 = 0$ 处的泰勒公式

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$$

$$\text{或 } = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$(2) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$$

$$\text{或 } = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$$

$$\text{或 } = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$\text{或 } = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(5) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$$

$$\text{或 } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

12. 函数单调性的判断

Th1: 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 区间内可导, 如果对 $\forall x \in (a, b)$, 都有 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$), 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的 (或单调减少)

Th2: (取极值的必要条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取极值, 则 $f'(x_0) = 0$

。

Th3: (取极值的第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可微, 且 $f'(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 但 $f'(x_0)$ 不存在。)

(1) 若当 x 经过 x_0 时, $f'(x)$ 由“+”变“-”, 则 $f(x_0)$ 为极大值;

(2)若当 x 经过 x_0 时, $f'(x)$ 由“-”变“+”, 则 $f(x_0)$ 为极小值;

(3)若 $f'(x)$ 经过 $x = x_0$ 的两侧不变号, 则 $f(x_0)$ 不是极值。

Th4: (取极值的第二充分条件)设 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x) \neq 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则当 $f''(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值;

当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值。

注: 如果 $f''(x_0) < 0$, 此方法失效。

13. 渐近线的求法 (1)水平渐近线 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, 则

$y = b$ 称为函数 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

(2)铅直渐近线 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 则

$x = x_0$ 称为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线。

(3)斜渐近线 若 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$, 则 $y = ax + b$ 称为 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

14. 函数凹凸性的判断

Th1: (凹凸性的判别定理) 若在 I 上 $f''(x) < 0$ (或 $f''(x) > 0$), 则 $f(x)$ 在 I 上是凸的 (或凹的)。

Th2: (拐点的判别定理1) 若在 x_0 处 $f''(x) = 0$, (或 $f''(x)$ 不存在), 当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

Th3: (拐点的判别定理2) 设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有三阶导数, 且 $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

15. 弧微分

$$dS = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

16. 曲率

曲线 $y = f(x)$ 在点 (x, y) 处的曲率 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。 对于参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

17. 曲率半径

曲线在点 M 处的曲率 $k (k \neq 0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系: $\rho = \frac{1}{k}$ 。

线性代数

行列式

1. 行列式按行(列)展开定理

(1) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则: $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

或 $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ 即 $AA^* = A^*A = |A|E$, 其

中: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ji}) = (A_{ij})^T$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$, 但 $|A \pm B| = |A| \pm |B|$ 不一定成立。

(3) $|kA| = k^n |A|$, A 为 n 阶方阵。

(4) 设 A 为 n 阶方阵, $|A^T| = |A|$; $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ (若 A 可逆), $|A^*| = |A|^{n-1}$

$n \geq 2$

(5) $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$, A, B 为方阵, 但 $\begin{vmatrix} O & A_{m \times m} \\ B_{n \times n} & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$ 。

(6) 范德蒙行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$

设 A 是 n 阶方阵, $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 A 的 n 个特征值, 则 $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

矩阵

矩阵: $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成 m 行 n 列的表格 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 称为矩阵, 简记

为 A , 或者 $(a_{ij})_{m \times n}$ 。若 $m = n$, 则称 A 是 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

矩阵的线性运算

1. 矩阵的加法

设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij}) = a_{ij} + b_{ij}$ 称为矩阵 A 与 B 的和, 记为 $A + B = C$ 。

2. 矩阵的数乘

设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, k 是一个常数, 则 $m \times n$ 矩阵 (ka_{ij}) 称为数 k 与矩阵 A 的数乘, 记为 kA 。

3. 矩阵的乘法

设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $n \times s$ 矩阵, 那么 $m \times s$ 矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 称为 AB 的乘积, 记为 $C = AB$ 。

4. A^T 、 A^{-1} 、 A^* 三者之间的关系

$$(1) (A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T, (kA)^T = kA^T, (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

$$(2) (A^{-1})^{-1} = A, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1},$$

但 $(A \pm B)^{-1} = A^{-1} \pm B^{-1}$ 不一定成立。

$$(3) (A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad (n \geq 3), (AB)^* = B^* A^*, (kA)^* = k^{n-1} A^* \quad (n \geq 2)$$

但 $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$ 不一定成立。

$$(4) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, (A^{-1})^* = (AA^*)^{-1}, (A^*)^T = (A^T)^*$$

5. 有关 A^* 的结论

$$(1) AA^* = A^*A = |A|E$$

$$(2) |A^*| = |A|^{n-1} \quad (n \geq 2), \quad (kA)^* = k^{n-1}A^*, \quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A \quad (n \geq 3)$$

$$(3) \text{若 } A \text{ 可逆, 则 } A^* = |A|A^{-1}, (A^*)^* = \frac{1}{|A|}A$$

(4) 若 A 为 n 阶方阵, 则:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

6. 有关 A^{-1} 的结论

$$A \text{ 可逆} \Leftrightarrow AB = E; \Leftrightarrow |A| \neq 0; \Leftrightarrow r(A) = n;$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 可以表示为初等矩阵的乘积}; \Leftrightarrow A; \Leftrightarrow Ax = 0.$$

7. 有关矩阵秩的结论

- (1) 秩 $r(A)$ =行秩=列秩；
- (2) $r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$;
- (3) $A \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 1$ ；
- (4) $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$;
- (5) 初等变换不改变矩阵的秩
- (6) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$,特别若 $AB = O$ 则：
 $r(A) + r(B) \leq n$
- (7) 若 A^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB) = r(B)$ ；若 B^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB) = r(A)$ ；
若 $r(A_{m \times n}) = n \Rightarrow r(AB) = r(B)$ ；若 $r(A_{m \times s}) = n \Rightarrow r(AB) = r(A)$ 。
- (8) $r(A_{m \times s}) = n \Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解

8.分块求逆公式

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

这里 A, B 均为可逆方阵。

向量

1.有关向量组的线性表示

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 至少有一个向量可以用其余向量线性表示。
- (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一线性表示。
- (3) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$ 。

2.有关向量组的线性相关性

- (1)部分相关,整体相关;整体无关,部分无关。
- (2) ① n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]| \neq 0$, n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]| = 0$ 。
- ② $n + 1$ 个 n 维向量线性相关。
- ③ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,则添加分量后仍线性无关;或一组向量线性相关,去掉某些分量后仍线性相关。

3.有关向量组的线性表示

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 至少有一个向量可以用其余向量线性表示。

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一线性表示。

(3) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$

4. 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系

设 $r(A_{m \times n}) = r$, 则 A 的秩 $r(A)$ 与 A 的行列向量组的线性相关性关系为:

(1) 若 $r(A_{m \times n}) = r = m$, 则 A 的行向量组线性无关。

(2) 若 $r(A_{m \times n}) = r < m$, 则 A 的行向量组线性相关。

(3) 若 $r(A_{m \times n}) = r = n$, 则 A 的列向量组线性无关。

(4) 若 $r(A_{m \times n}) = r < n$, 则 A 的列向量组线性相关。

5. n 维向量空间的基变换公式及过渡矩阵

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是向量空间 V 的两组基, 则基变换公式为:

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) C$$

其中 C 是可逆矩阵, 称为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵。

6. 坐标变换公式

若向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的坐标分别是

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \text{ 即:}$$

$\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_n\beta_n$, 则向量坐标变换公式为 $X = CY$ 或 $Y = C^{-1}X$, 其中 C 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵。

7. 向量的内积

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha$$

8. Schmidt 正交化

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则可构造 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 使其两两正交, 且 β_i 仅是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ 的线性组合 ($i = 1, 2, \dots, n$), 再把 β_i 单位化, 记 $\gamma_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|}$, 则

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i \text{ 是规范正交向量组。其中 } \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2,$$

矩阵的特征值和特征向量

1. 矩阵的特征值和特征向量的概念及性质

(1) 设 λ 是 A 的一个特征值, 则 $kA, aA + bE, A^2, A^m, f(A), A^T, A^{-1}, A^*$ 有一个特征值分别为 $k\lambda, a\lambda + b, \lambda^2, \lambda^m, f(\lambda), \lambda, \lambda^{-1}, \frac{|A|}{\lambda}$, 且对应特征向量相同 (A^T 例外)。

(2) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值, 则 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|$, 从而 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 没有特征值。

(3) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 为 A 的 s 个特征值, 对应特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$,

若: $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$,

则:

$$A^n \alpha = k_1 A^n \alpha_1 + k_2 A^n \alpha_2 + \dots + k_s A^n \alpha_s = k_1 \lambda_1^n \alpha_1 + k_2 \lambda_2^n \alpha_2 + \dots + k_s \lambda_s^n \alpha_s$$

。

2. 相似变换、相似矩阵的概念及性质

(1) 若 $A \sim B$, 则

$$1. A^T \sim B^T, A^{-1} \sim B^{-1}, A^* \sim B^*$$

$$2. |A| = |B|, \sum_{i=1}^n A_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii}, r(A) = r(B)$$

$$3. |\lambda E - A| = |\lambda E - B|, \text{对}\forall \lambda \text{成立}$$

3. 矩阵可相似对角化的充分必要条件

(1) 设 A 为 n 阶方阵, 则 A 可对角化 \Leftrightarrow 对每个 k_i 重根特征值 λ_i , 有 $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$

(2) 设 A 可对角化, 则由 $P^{-1}AP = \Lambda$, 有 $A = P\Lambda P^{-1}$, 从而 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$

(3) 重要结论

$$1. \text{若 } A \sim B, C \sim D, \text{ 则 } \begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}.$$

2. 若 $A \sim B$, 则 $f(A) \sim f(B), |f(A)| \sim |f(B)|$, 其中 $f(A)$ 为关于 n 阶方阵 A 的多项式。

3. 若 A 为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数(重根重复计算) = 秩(A)

4. 实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角阵

(1) 相似矩阵: 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 如果存在一个可逆矩阵 P , 使得 $B = P^{-1}AP$ 成立, 则称矩阵 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$ 。

(2) 相似矩阵的性质: 如果 $A \sim B$ 则有:

$$1. A^T \sim B^T$$

2. $A^{-1} \sim B^{-1}$ (若 A, B 均可逆)

3. $A^k \sim B^k$ (k 为正整数)

4. $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 从而 A, B

有相同的特征值

5. $|A| = |B|$, 从而 A, B 同时可逆或者不可逆

6. $\text{秩}(A) = \text{秩}(B)$, $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, A, B 不一定相似

二次型

1. n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次函数

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, 其中 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 称为 n 元二次型, 简称二次型. 若令 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, 这二次

型 f 可改写成矩阵向量形式 $f = x^T A x$. 其中 A 称为二次型矩阵, 因为 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 所以二次型矩阵均为对称矩阵, 且二次型与对称矩阵一一对应, 并把矩阵 A 的秩称为二次型的秩.

2. 惯性定理, 二次型的标准形和规范形

(1) 惯性定理

对于任一二次型, 不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准形, 其正负惯性指数与所选变换无关, 这就是所谓的惯性定理.

(2) 标准形

二次型 $f = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$ 经过合同变换 $x = C y$ 化为 $f = x^T A x = y^T C^T A C$

$y = \sum_{i=1}^r d_i y_i^2$ 称为 f ($r \leq n$) 的标准形. 在一般的数域内, 二次型的标准形不是唯一的, 与所作的合同变换有关, 但系数不为零的平方项的个数由 $r(A)$ 唯一确定.

(3) 规范形

任一实二次型 f 都可经过合同变换化为规范形 $f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$, 其中 r 为 A 的秩, p 为正惯性指数, $r - p$ 为负惯性指数, 且规范型唯一.

3. 用正交变换和配方法化二次型为标准形, 二次型及其矩阵的正定性

设 A 正定 $\Rightarrow kA$ ($k > 0$), A^T, A^{-1}, A^* 正定; $|A| > 0$, A 可逆; $a_{ii} > 0$, 且 $|A_{ii}| > 0$

A, B 正定 $\Rightarrow A + B$ 正定, 但 AB, BA 不一定正定

A 正定 $\Leftrightarrow f(x) = x^T A x > 0, \forall x \neq 0$

$\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式全大于零

$\Leftrightarrow A$ 的所有特征值大于零

$\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 n

\Leftrightarrow 存在可逆阵 P 使 $A = P^T P$

\Leftrightarrow 存在正交矩阵 Q , 使 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

其中 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 正定 $\Rightarrow kA (k > 0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定; $|A| > 0, A$ 可逆; $a_{ii} > 0$, 且 $|A_{ii}| > 0$ 。

概率论和数理统计

随机事件和概率

1. 事件的关系与运算

(1) 子事件: $A \subset B$, 若 A 发生, 则 B 发生。

(2) 相等事件: $A = B$, 即 $A \subset B$, 且 $B \subset A$ 。

(3) 和事件: $A \cup B$ (或 $A + B$), A 与 B 中至少有一个发生。

(4) 差事件: $A - B$, A 发生但 B 不发生。

(5) 积事件: $A \cap B$ (或 AB), A 与 B 同时发生。

(6) 互斥事件 (互不相容): $A \cap B = \emptyset$ 。

(7) 互逆事件 (对立事件): $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega, A = \bar{B}, B = \bar{A}$

2. 运算律

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(3) 分配律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. 德·摩根律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

4. 完全事件组

$A_1 A_2 \cdots A_n$ 两两互斥, 且和事件为必然事件, 即 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

5. 概率的基本公式 (1) 条件概率:

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 表示A发生的条件下, B发生的概率。

(2)全概率公式:

$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$, $B_i B_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ (3) Bayes公式:

$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$, $j = 1, 2, \dots, n$ 注: 上述公式中事件 B_i 的个数可为可列个。

(4)乘法公式:

$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = P(A_2)P(A_1|A_2)$
 $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$

6. 事件的独立性

(1)A与B相互独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

(2)A, B, C两两独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B); P(BC) = P(B)P(C); P(AC) = P(A)P(C);$

(3)A, B, C相互独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B); P(BC) = P(B)P(C); P(AC) = P(A)P(C); P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

7. 独立重复试验

将某试验独立重复n次, 若每次实验中事件A发生的概率为p, 则n次试验中A发生k次的概率为: $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

8. 重要公式与结论

(1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(AB)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

(4) $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB), P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}),$

$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$

(5)条件概率 $P(\cdot|B)$ 满足概率的所有性质, 例如: $P(\bar{A}_1|B) = 1 - P(A_1|B)$

$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 A_2|B)$

$P(A_1 A_2|B) = P(A_1|B)P(A_2|A_1 B)$

(6)若 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则 $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i),$

$P(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$

(7)互斥、互逆与独立性之间的关系： A 与 B 互逆 $\Rightarrow A$ 与 B 互斥，但反之不成立， A 与 B 互斥（或互逆）且均非零概率事件 $\Rightarrow A$ 与 B 不独立。

(8)若 $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$ 相互独立，则 $f(A_1, A_2, \dots, A_m)$ 与 $g(B_1, B_2, \dots, B_n)$ 也相互独立，其中 $f(\cdot), g(\cdot)$ 分别表示对相应事件做任意事件运算后所得的事件，另外，概率为1（或0）的事件与任何事件相互独立。

随机变量及其概率分布

1. 随机变量及概率分布

取值带有随机性的变量，严格地说是定义在样本空间上，取值于实数的函数称为随机变量，概率分布通常指分布函数或分布律

2. 分布函数的概念与性质

定义： $F(x) = P(X \leq x), -\infty < x < +\infty$

性质：(1) $0 \leq F(x) \leq 1$

(2) $F(x)$ 单调不减

(3) 右连续 $F(x+0) = F(x)$

(4) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

3. 离散型随机变量的概率分布

$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots \quad p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

4. 连续型随机变量的概率密度

概率密度 $f(x)$ ；非负可积，且：

(1) $f(x) \geq 0,$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

(3) x 为 $f(x)$ 的连续点，则：

$f(x) = F'(x)$ 分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

5. 常见分布

(1) 0-1分布： $P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1$

(2) 二项分布： $B(n, p) : P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$

(3) Poisson分布： $p(\lambda) : P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$

(4) 均匀分布 $U(a, b) : f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$(5) \text{ 正态分布: } N(\mu, \sigma^2) : \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0, \infty < x < +\infty$$

$$(6) \text{ 指数分布: } E(\lambda) : f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \end{cases}$$

$$(7) \text{ 几何分布: } G(p) : P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, 0 < p < 1, k = 1, 2, \dots$$

$$(8) \text{ 超几何分布: } H(N, M, n) : P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, \dots, \min(n, M)$$

6. 随机变量函数的概率分布

$$(1) \text{ 离散型: } P(X = x_1) = p_i, Y = g(X)$$

$$\text{则: } P(Y = y_j) = \sum_{g(x_i)=y_j} P(X = x_i)$$

$$(2) \text{ 连续型: } X \sim f_X(x), Y = g(x)$$

$$\text{则: } F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx, \quad f_Y(y) = F'_Y(y)$$

7. 重要公式与结论

$$(1) X \sim N(0, 1) \Rightarrow \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \Phi(0) = \frac{1}{2},$$

$$\Phi(-a) = P(X \leq -a) = 1 - \Phi(a)$$

$$(2) X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1), P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$(3) X \sim E(\lambda) \Rightarrow P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$$

$$(4) X \sim G(p) \Rightarrow P(X = m+k | X > m) = P(X = k)$$

(5) 离散型随机变量的分布函数为阶梯间断函数；连续型随机变量的分布函数为连续函数，但不一定为处处可导函数。

(6) 存在既非离散也非连续型随机变量。

多维随机变量及其分布

1. 二维随机变量及其联合分布

由两个随机变量构成的随机向量 (X, Y) ，联合分布为 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

2. 二维离散型随机变量的分布

$$(1) \text{ 联合概率分布律 } P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}; i, j = 1, 2, \dots$$

$$(2) \text{ 边缘分布律 } p_{i \cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, 2, \dots \quad p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1, 2, \dots$$

$$(3) \text{ 条件分布律 } P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot}}$$

3. 二维连续性随机变量的密度

(1) 联合概率密度 $f(x, y)$:

- $f(x, y) \geq 0$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

(2) 分布函数: $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$

(3) 边缘概率密度: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

(4) 条件概率密度: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

4. 常见二维随机变量的联合分布

(1) 二维均匀分布: $(x, y) \sim U(D)$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2) 二维正态分布: $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$,
 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

5. 随机变量的独立性和相关性

X 和 Y 的相互独立: $\Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$:

$\Leftrightarrow p_{ij} = p_i \cdot p_j$ (离散型) $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ (连续型)

X 和 Y 的相关性:

相关系数 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X 和 Y 不相关, 否则称 X 和 Y 相关

6. 两个随机变量简单函数的概率分布

离散型: $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$, $Z = g(X, Y)$ 则:

$$P(Z = z_k) = P\{g(X, Y) = z_k\} = \sum_{g(x_i, y_j) = z_k} P(X = x_i, Y = y_j)$$

连续型: $(X, Y) \sim f(x, y)$, $Z = g(X, Y)$ 则:

$$F_z(z) = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy, f_z(z) = F'_z(z)$$

7. 重要公式与结论

(1) 边缘密度公式: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

(2) $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$

(3) 若 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 则有:

- $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

2. X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$, 即 X 与 Y 不相关。

3. $C_1X + C_2Y \sim N(C_1\mu_1 + C_2\mu_2, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + 2C_1C_2\sigma_1\sigma_2\rho)$

4. X 关于 $Y = y$ 的条件分布为: $N(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2))$

5. Y 关于 $X = x$ 的条件分布为: $N(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2))$

(4) 若 X 与 Y 独立, 且分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则:
 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, 0)$,

$C_1X + C_2Y \sim N(C_1\mu_1 + C_2\mu_2, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2)$.

(5) 若 X 与 Y 相互独立, $f(x)$ 和 $g(x)$ 为连续函数, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立。

随机变量的数字特征

1. 数学期望

离散型: $P\{X = x_i\} = p_i, E(X) = \sum_i x_i p_i$;

连续型: $X \sim f(x), E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

性质:

(1) $E(C) = C, E[E(X)] = E(X)$

(2) $E(C_1X + C_2Y) = C_1E(X) + C_2E(Y)$

(3) 若 X 和 Y 独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$

(4) $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

2. 方差: $D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

3. 标准差: $\sqrt{D(X)}$,

4. 离散型: $D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$

5. 连续型: $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$

性质:

(1) $D(C) = 0, D[E(X)] = 0, D[D(X)] = 0$

(2) X 与 Y 相互独立, 则 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

(3) $D(C_1X + C_2) = C_1^2 D(X)$

(4) 一般有

$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

(5) $D(X) < E(X - C)^2, C \neq E(X)$

$$(6) D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X = C\} = 1$$

6. 随机变量函数的数学期望

(1) 对于函数 $Y = g(x)$

$$X \text{ 为离散型: } P\{X = x_i\} = p_i, E(Y) = \sum_i g(x_i)p_i;$$

$$X \text{ 为连续型: } X \sim f(x), E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

(2) $Z = g(X, Y); (X, Y) \sim P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij};$

$$E(Z) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij} \quad (X, Y) \sim f(x, y);$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$$

7. 协方差

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

8. 相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}, k \text{ 阶原点矩 } E(X^k); k \text{ 阶中心矩 } E\{[X - E(X)]^k\}$$

性质:

$$(1) Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$$

$$(2) Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$$

$$(3) Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$$

$$(4) |\rho(X, Y)| \leq 1$$

$$(5) \rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1, \text{ 其中 } a > 0$$

$$\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1, \text{ 其中 } a < 0$$

9. 重要公式与结论

$$(1) D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$(2) Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$(3) |\rho(X, Y)| \leq 1, \text{ 且 } \rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1, \text{ 其中 } a > 0$$

$$\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1, \text{ 其中 } a < 0$$

(4) 下面5个条件互为充要条件:

$$\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(X, Y) = E(X)E(Y)$$

$$\Leftrightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y) \Leftrightarrow D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

注: X 与 Y 独立为上述5个条件中任何一个成立的充分条件, 但非必要条件。

数理统计的基本概念

1. 基本概念

总体：研究对象的全体，它是一个随机变量，用 X 表示。

个体：组成总体的每个基本元素。

简单随机样本：来自总体 X 的 n 个相互独立且与总体同分布的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n ，称为容量为 n 的简单随机样本，简称样本。

统计量：设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本， $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是样本的连续函数，且 $g()$ 中不含任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为统计量。

样本均值： $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

样本方差： $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

样本矩：样本 k 阶原点矩： $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1, 2, \dots$

样本 k 阶中心矩： $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k = 1, 2, \dots$

2. 分布

χ^2 分布： $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$ ，其中 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，且同服从 $N(0, 1)$

t 分布： $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ ，其中 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ ，且 X, Y 相互独立。

F 分布： $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$ ，其中 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ ，且 X, Y 相互独立。

分位数：若 $P(X \leq x_\alpha) = \alpha$ ，则称 x_α 为 X 的 α 分位数

3. 正态总体的常用样本分布

(1) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ，则：

$$1. \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ 或者 } \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$2. \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$3. \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$4) \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

4. 重要公式与结论

(1) 对于 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ ，有 $E(\chi^2(n)) = n, D(\chi^2(n)) = 2n$ ；

(2) 对于 $T \sim t(n)$, 有 $E(T) = 0, D(T) = \frac{n}{n-2}(n > 2)$;

(3) 对于 $F \sim F(m, n)$, 有 $\frac{1}{F} \sim F(n, m), F_{\alpha/2}(m, n) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n, m)}$;

(4) 对于任意总体 X , 有 $E(\bar{X}) = E(X), E(S^2) = D(X), D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}$